

سوال ۱:

قضیه‌ی اول رفاه: مجموعه تخصیص‌هایی که از به تعادل رسیدن بازارها در شرایط رقابتی (تعادل رقابتی) بدست می‌آید یک تخصیص بهینه پارتو است.

خیر، وضع مالیات روی عایدی سرمایه، همانند اصطکاکی است که پاسخ‌ها را از وضعیت بهینه دور می‌کند. چرا که انگیزه افراد برای سرمایه‌گذاری را کاهش می‌دهد.

پیشنهاد برای دستیابی به بهینه‌ی پارتو با وجود وضع مالیات: به جای اخذ مالیات به صورت نسبی از عایدی سرمایه، به صورت یکجا (Lump-sum) اخذ گردد.

سوال ۲:

Law of motion for capital: $K_{t+1} = sF(K_t, L_t) + (1 - \delta)K_t$

Per capita: $\xrightarrow{\div L_t} \frac{K_{t+1}}{L_t} = \frac{sF(K_t, L_t)}{L_t} + \frac{(1-\delta)K_t}{L_t} \rightarrow \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \frac{L_{t+1}}{L_t} = sF(k_t, 1) +$

$(1 - \delta)k_t \rightarrow k_{t+1}(1 + n) = sF(k_t) + (1 - \delta)k_t$

$$\rightarrow \Delta k_t = sF(k_t) - (n + \delta)k_t$$

در تعادل بلندمدت، تغییرات سرمایه سرانه با گذشت زمان برابر صفر است ($k_{t+1} = k_t = k^*$) لذا $\Delta k_t = 0$

$$sF(k^*) - (n + \delta)k^* = 0 \rightarrow sF(k^*) = (n + \delta)k^*$$

بنابراین مقدار سرمایه سرانه در وضعیت مانا (بلند مدت) از تلاقی منحنی $sF(k_t)$ و خط $(n + \delta)k_t$ در صفحه‌ای که محور افقی آن k_t به دست می‌آید. لذا هرچه نرخ پس‌انداز (s) بزرگتر باشد منحنی $sF(k_t)$ مقادیر بیشتری خواهد داشت و محل برخوردش با خط $(n + \delta)k_t$ در نقطه‌ای دورتر از مبدا خواهد بود و k^* برای آن بزرگتر خواهد بود.

سوال ۳:

۳-۱: تعادل رقابتی مجموعه‌ای از تخصیص‌های تعادلی برای مصرف خانوار (C_t)، میزان نیروی کار (l_t) و سرمایه (K_t) است؛ به‌طوری‌که خانوارها مطلوبیت و بنگاه اقتصادی سود خود را بیشینه می‌کنند و با تسویه بازار کالای مصرفی، بازار کار و بازار سرمایه، بردارهای قیمتی $\{r_t, w_t, p_t\}$ به دست می‌آید.

HH's Problem:

$$\max_{C_t, l_t, K_{t+1}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U(C_t, l_t)$$

$$s.t. C_t + K_{t+1} = w_t l_t + (1 + r_t) K_t$$

Lagrangian:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U(C_t, l_t) + \lambda_t (w_t l_t + (1 + r_t) K_t - C_t - K_{t+1})$$

FOCs:

$$[C_t]: \beta^t U'_{C_t} - \lambda_t = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$[l_t]: \beta^t U'_{l_t} + w_t \lambda_t = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$[K_{t+1}]: -\lambda_t + (1 + r_{t+1}) \lambda_{t+1} = 0 \quad \textcircled{3}$$

از تقسیم $\textcircled{2}$ بر $\textcircled{1}$ معادلهٔ اوایلر درون دوره‌ای به دست می‌آید:

$$\frac{U'_{l_t}}{U'_{C_t}} = -w_t \quad \textcircled{4}$$

این معادله می‌گوید میزان بهینه کارکردن و مصرف برای خانوار نقطه‌ای است که میزان کاهش مطلوبیت خانوار از یک واحد بیشتر کارکردن، دقیقاً با میزان افزایش مطلوبیت او که به‌ازای دستمزدی که ازین یک واحد بیشتر کار کردن به دست می‌آورد و آن را مصرف می‌کند برابر باشد.

برای به‌دست‌آوردن معادلهٔ اوایلر بین دوره‌ای مطابق روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\beta^t U'_{C_t} - \lambda_t = 0 \quad \textcircled{1} \xrightarrow{\text{یک دوره به جلو}} \beta^{t+1} U'_{C_{t+1}} - \lambda_{t+1} = 0$$

λ ها را به سمت راست تساوی می‌بریم و دوطرف تساوی‌های بالا را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \beta \frac{U'_{C_{t+1}}}{U'_{C_t}}$$

طبق $\textcircled{3}$ داریم:

$$-\lambda_t + (1 + r_{t+1})\lambda_{t+1} = 0 \rightarrow \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{1}{1 + r_{t+1}}$$

سمت چپ دو تساوی اخیر با هم برابر است، لذا سمت راست آن‌ها هم باید برابر باشد:

$$U'_{C_t} = \beta(1 + r_{t+1})U'_{C_{t+1}} \quad (5)$$

این معادله، اوایلر بین دوره‌ای نام دارد و نشان می‌دهد مصرف‌های بهینه خانوار در نقطه‌ای اتفاق می‌افتد که مطلوبیت نهایی آخرین واحد مصرف در دوره t ، برابر باشد با مطلوبیتی که می‌توانست حاصل شود اگر این یک واحد، سرمایه‌گذاری می‌شد و در دوره بعدی $(t + 1)$ با سود آن $(1 + r_{t+1})$ مصرف می‌شد؛ به‌طوری‌که مطلوبیت دوره بعدی، با نرخ رجحان زمانی (β) همراه است.

۳-۳:

Firm's Problem:

$$\begin{aligned} \max_{K_t, l_t} \quad & F(K_t, l_t) - w_t l_t - r_t K_t \\ \text{s.t.} \quad & F(K_t, l_t) = l_t^\alpha K_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

FOCs:

$$[l_t]: MPL = w_t \rightarrow w_t = (1 - \alpha)l_t^{-\alpha}K_t^\alpha = (1 - \alpha)\frac{F(K_t, l_t)}{l_t} \quad (6)$$

$$[K_t]: MPK = r_t \rightarrow r_t = \alpha l_t^{1-\alpha}K_t^{\alpha-1} = \alpha\frac{F(K_t, l_t)}{K_t} \quad (7)$$

براساس ۶) بنگاه تولیدی تا آنجایی نیروی کار استخدام می‌کند که استخدام یک واحد بیشتر نیروی کار، به اندازه‌ی نرخ دستمزد به مقدار تولید بیفزاید.

براساس ۷) بنگاه تولیدی تا آنجایی سرمایه‌ی فیزیکی به کار می‌گیرد که به کارگیری یک واحد بیشتر سرمایه، به اندازه‌ی نرخ بهره، به مقدار تولید بیفزاید.

۳-۴: سه بازار کالای مصرفی، نیروی کار و سرمایه باید تسویه شوند:

$$C_t + K_{t+1} = F(K_t, l_t) + (1 - \delta)K_t \quad (8)$$

$$l_t^s = l_t^d \text{ :نیروی کار}$$

$$K_t^s = K_t^d \text{ :سرمایه}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود رابطه اتحاد ملی ($C + i = Y$) در معادله تسویه بازار کالای مصرفی برقرار است.

۵-۳: در حالت پایدار، متغیرها در سطح، مانا می‌شوند:

$$K_{t+1} = K_t = \bar{K}, l_t = \bar{l}, w_t = \bar{w}, r_t = \bar{r}, C_t = \bar{C}$$

$\bar{C}$ ، $\bar{l}$ ، $\bar{r}$ و $\bar{w}$ پنج مجهول و ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ پنج معادله مستقل که مجهولات را به دست می‌دهند.

برای آنکه بتوانیم مجهولات را به طور صریح بر حسب پارامترهای مسئله به دست آوریم باید یک فرم تابعی مانند تابع زیر برای مطلوبیت در نظر بگیریم:

$$U(C_t, l_t) = \ln(C_t) + \ln(1 - l_t)$$

ابتدائاً از ۵ مقدار $\bar{r}$ را به دست می‌آوریم:

$$U'_C = \beta(1 + \bar{r})U'_{\bar{C}} \rightarrow \boxed{\bar{r} = \frac{1}{\beta} - 1}$$

همچنین از ۷ داریم:

$$\bar{r} = \alpha \bar{l}^{1-\alpha} \bar{K}^{\alpha-1} \rightarrow \frac{\bar{K}}{\bar{l}} = \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

با استفاده از ۶ و با جاگذاری تساوی فوق در آن داریم:

$$\bar{w} = (1 - \alpha) \left(\frac{\bar{K}}{\bar{l}} \right)^{\alpha} \rightarrow \boxed{\bar{w} = (1 - \alpha) \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

در ادامه و با استفاده معادله تسویه بازار کالای مصرفی داریم:

$$\bar{C} + \bar{K} = \bar{F}(K_t, l_t) + (1 - \delta)\bar{K} \rightarrow \bar{C} + \delta\bar{K} = \bar{F}(\bar{K}, \bar{l})$$

هر یک از سه عبارت حاضر در تساوی بالا را از معادله‌های مختلف به دست آورده و جای گذاری می‌کنیم. از اوایل درون دوره‌ای داریم:

$$\frac{\bar{C}}{1 - \bar{l}} = \bar{w} \rightarrow \bar{C} = \bar{w}(1 - \bar{l})$$

همچنین از ⑥ داریم:

$$\bar{F}(\bar{K}, \bar{l}) = \frac{\bar{w}\bar{l}}{(1 - \alpha)}$$

با استفاده از دو تساوی اخیر و همچنین نسبت $\frac{\bar{K}}{\bar{l}}$ ، که در سطور بالا به دست آوردیم، و جاگذاری آن‌ها در معادله تسویه بازار کالای مصرفی داریم:

$$\begin{aligned} \bar{w}(1 - \bar{l}) + \delta \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \bar{l} &= \frac{\bar{w}\bar{l}}{(1 - \alpha)} \rightarrow \\ \left(\bar{w} + \frac{\bar{w}}{(1 - \alpha)} - \delta \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \bar{l} &= \bar{w} \rightarrow \\ \bar{l} &= \frac{\bar{w}}{\left(\bar{w} + \frac{\bar{w}}{(1 - \alpha)} - \delta \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}-1} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left((1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}-1} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}-1} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}-1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)} \Rightarrow$$

$$\bar{l} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\frac{\delta\alpha}{\frac{1}{\beta}-1}}$$

در ادامه، برای محاسبه $\bar{K}$ و $\bar{C}$ داریم:

$$\frac{\bar{K}}{\bar{l}} = \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}-1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightarrow \bar{K} = \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}-1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha-\frac{\delta\alpha}{\frac{1}{\beta}-1}} \right)$$

$$\bar{C} = \bar{w}(1-\bar{l}) \rightarrow \bar{C} = (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}-1} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(1 - \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\frac{\delta\alpha}{\frac{1}{\beta}-1}} \right)$$

۳-۶: فرض می‌کنیم دولت با نرخ τ از عایدی سرمایه مالیات می‌گیرد:

HH's Problem:

$$\max_{C_t, l_t, K_{t+1}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U(C_t, l_t)$$

$$s.t. C_t + K_{t+1} = w_t l_t + (1+r_t)(1-\tau)K_t$$

Lagrangian:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U(C_t, l_t) + \lambda_t (w_t l_t + (1 + r_t)(1 - \tau)K_t - C_t - K_{t+1})$$

FOCs:

$$[C_t]: \beta^t U'_{C_t} - \lambda_t = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$[l_t]: \beta^t U'_{l_t} + w_t \lambda_t = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$[K_{t+1}]: -\lambda_t + (1 + r_{t+1})(1 - \tau)\lambda_{t+1} = 0 \quad \textcircled{9}$$

معادله‌ی اوایل درون‌دوره‌ای با شرایطی که مالیات اخذ نمی‌گردد تفاوتی نمی‌کند. چرا که شروط مرتبه‌ی اول $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ ، که معادله‌ی اوایل درون‌دوره‌ای را به دست می‌دهند، برای هر دو مسئله یکسان است. اما با توجه به اینکه $\textcircled{9}$ با $\textcircled{3}$ متفاوت است، معادله‌ی اوایل بین‌دوره‌ای مطابق تساوی زیر است:

$$U'_{C_t} = \beta(1 + r_{t+1})(1 - \tau)U'_{C_{t+1}} \quad \textcircled{10}$$

روابط تسویه بازار نیز تغییر نمی‌کنند.

۳-۷: برای روابط بلند مدت حالتی که مالیات اخذ می‌گردد مطابق با $\textcircled{10}$ داریم:

$$U'_{\bar{C}} = \beta(1 + \bar{r})(1 - \tau)U'_{\bar{C}} \rightarrow \bar{r} = \frac{1}{\beta(1 - \tau)} - 1$$

یعنی نرخ بهره تعادلی افزایش می‌یابد. همانند قسمت قبل و مطابق با $\textcircled{7}$:

$$\bar{r} = \alpha \bar{l}^{1-\alpha} \bar{K}^{\alpha-1} \rightarrow \frac{\bar{K}}{\bar{l}} = \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta(1-\tau)} - 1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

با توجه به عبارت $(1 - \tau)$ ، که در مخرج مخرج، ظاهر شده است، $\frac{\bar{K}}{\bar{l}}$ نسبت به حالت قبل، کاهش می‌یابد.

برای $\frac{\bar{C}}{\bar{l}}$ به جای $\bar{C}$ از معادله تسویه بازار کالای مصرفی جاگذاری کرده و داریم:

$$\frac{\bar{C}}{\bar{l}} = \frac{\bar{F}(\bar{K}, \bar{l}) - \delta \bar{K}}{\bar{l}} = \frac{\bar{l}^{\alpha} \bar{K}^{1-\alpha}}{\bar{l}} - \frac{\delta \bar{K}}{\bar{l}} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{l}} \right)^{1-\alpha} - \frac{\delta \bar{K}}{\bar{l}} = \frac{\bar{K}}{\bar{l}} \left(\left(\frac{\bar{K}}{\bar{l}} \right)^{-\alpha} - \delta \right)$$

بنابراین باتوجه به اینکه $\frac{\bar{K}}{\bar{L}}$ کاهش و $\left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{-\alpha}$ افزایش می‌یابد، اثر وضع مالیات روی $\frac{\bar{C}}{\bar{L}}$ مشخص نیست.